1.3. Sayı Kümeleri ve İşlem Özellikleri

9. SINIF MATEMATİK | MAARİF MODELİ UYUMLU | Hızlı Hatırlama • MAT.9.1.3

Daha fazla soru ve konu anlatımı için
www.sinifdijital.com

Rafine Özet Kartları • Görsel Şemalar • Kavram Yanılgısı Radarı • Hızlı Pekiştirme Soruları

Bölüm 1 — Sayı Kümeleri Hiyerarşisi ve Sıralama Yasaları

1. Küme Kapsaması

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

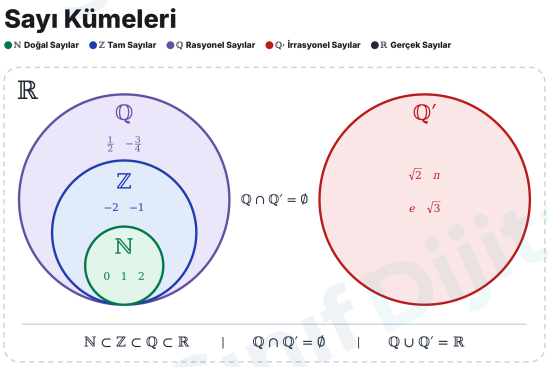
- $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$
- Rasyonel ($\mathbb{Q}$): devirli veya sonlu ondalık ($\frac{a}{b}$).
- İrrasyonel ($\mathbb{Q}'$): $\sqrt{5}, \pi, e$.

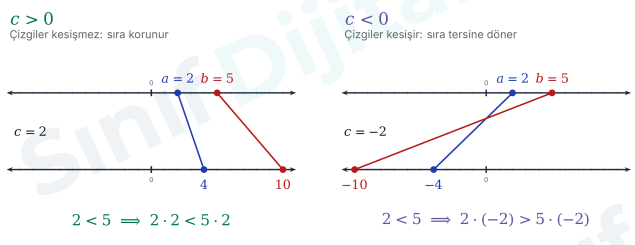
2. Sıralama Temelleri

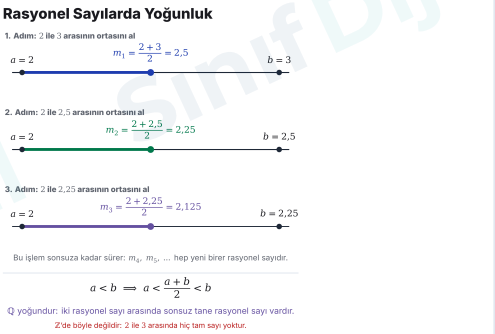
- **Yansıma:** $a \leq a$
- **Ters Bakışım:** $a \leq b$ ve $b \leq a \implies a = b$
- **Geçişme:** $a \leq b \leq c \implies a \leq c$
- **Negatif Çarpan:** $c < 0 \implies$ yön tersine döner!

3. Çarpma Tersi & Arada Olma

- **Aynı işaret:** $0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- **Zıt işaret:** $a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- **Yoğunluk:** $a < \frac{a+b}{2} < b$ ($\mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}$ yoğundur; $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ kesiklidir).







Bölüm 2 — Kapalılık Özelliği Matrisi ve İrrasyonel Tuzağı

Kapalılık Tanımı ve Çürütme Yöntemi

• $\forall x, y \in A \implies (x * y) \in A$ ise A kümesi $*$ işlemine göre **kapalıdır**. Tek bir **karşıt örnek** ($x * y \notin A$) kapalılığı çürütmek için yeterlidir.

• $\mathbb{N}\,(+, \cdot)$, $\mathbb{Z}\,(+, -, \cdot)$, $\mathbb{Q}\,(+, -, \cdot)$, $\mathbb{R}\,(+, -, \cdot)$ kapalıdır. Sıfır çıkarıldığında $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ve $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **bölme ($\div$)** işlemine kapalı olur (ancak $1 + (-1) = 0$ yüzünden toplamaya kapalı değildir!). $\mathbb{Q}'$ ise dört işlemin **hiçbirine** kapalı değildir.

Sayı Kümelerinde Dört İşlem Kapalılık Matrisi

Seçilen her iki elemanın işlem sonucu aynı kümede kalıyorsa o küme ilgili işlem altında **kapalıdır**; tek bir karşıt örnek kapalılığı bozar.

Sayı Kümesi	Toplama (+)	Çıkarma (−)	Çarpma (·)	Bölme (÷)
$\mathbb{N}$ Doğal Sayılar	✓ Kapalı $3 + 5 = 8 \in \mathbb{N}$	✗ Kapalı Değil $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$	✓ Kapalı $3 \cdot 5 = 15 \in \mathbb{N}$	✗ Kapalı Değil $1 \div 2 = 0{,}5 \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$ Tam Sayılar	✓ Kapalı $-3 + 1 = -2 \in \mathbb{Z}$	✓ Kapalı $3 - 5 = -2 \in \mathbb{Z}$	✓ Kapalı $-3 \cdot 2 = -6 \in \mathbb{Z}$	✗ Kapalı Değil $1 \div 2 = 0{,}5 \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$ Rasyonel Sayılar	✓ Kapalı $\forall\, a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$	✓ Kapalı $\forall\, a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbb{Q}$	✓ Kapalı $\forall\, a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q}$	✗ Kapalı Değil $0 \in \mathbb{Q}$, $a \div 0$ tanımsız
$\mathbb{R}$ Gerçek Sayılar	✓ Kapalı $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$	✓ Kapalı $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R}$	✓ Kapalı $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$	✗ Kapalı Değil $0 \in \mathbb{R}$, $a \div 0$ tanımsız

⚠ Sıfıra Bölme İstisnası (MEB Müfredatı Kontrol Noktası)

Sıfır (0) elemanı $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerine dâhil olduğu ve sıfıra bölme tanımsız olduğu için bu iki küme bölme işlemine göre **kapalı değildir**. Ancak sıfır kümeden çıkarıldığında $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ve $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümeleri bölme işlemine göre **kapalıdır**.

Not: İrrasyonel sayılar kümesi ($\mathbb{Q}'$) dört işlemin hiçbirinde kapalı değildir (bir sonraki görselde karşıt örneklerle incelenmiştir).

İrrasyonel Sayılar Dört İşleme Kapalı Değildir

İşlem	İki irrasyonel sayı	Sonuç	$\mathbb{Q}'$ kapalı mı?
Toplama (+)	$\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$	$= 0 \in \mathbb{Q}$	✗
Çıkarma (−)	$(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3}$	$= 2 \in \mathbb{Q}$	✗
Çarpma (·)	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	$= 4 \in \mathbb{Q}$	✗
Bölme (÷)	$\sqrt{18} \div \sqrt{2}$	$= 3 \in \mathbb{Q}$	✗

Sonuç $\mathbb{Q}'$ dışına çıktığı için $\mathbb{Q}'$ dört işleme kapalı değildir.

Her seferinde rasyonel çıkmaz ($\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrasyoneldir), ama tek bir örnek kapalılığı bozmaya yeter.

Bölüm 3 — Kavram Yanılgısı Radarı (❌ Tuzak vs ✅ Doğru)

❌ Yanlış	✅ Doğru
İki irrasyonel sayının toplamı/çarpımı daima irrasyoneldir.	**Doğru:** $(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6\in\mathbb{Q}$ ve $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}'$ kapalı değildir!).
Yanlış: $x<y$ iken daima $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ olur.	**Doğru:** Yalnızca **aynı işaretli** iken yön değişir; $-3<2$ iken $-\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$'dir!
Yanlış: $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ bölme işlemine göre kapalıdır.	**Doğru:** 0 elemanı nedeniyle kapalı değildir; bölmeye $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ ve $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kapalıdır.
Yanlış: $0<a<1$ için karesi büyür: $a^2>a$.	**Doğru:** Basit kesirlerin kuvveti alındıkça küçülür: $0<a^2<a<1$!
Yanlış: Ardışık tam sayılar arasında başka sayı yoktur.	**Doğru:** Başka **tam sayı** yoktur; ama sonsuz rasyonel ve irrasyonel sayı vardır!

Bölüm 4 — Stratejik Karar Akışı: "Soruda Nereden Başlanır?"

1. SADELEŞTİR — Kök veya kesir dışarı **çıkıyor mu kontrol et!** → **2. İŞARET & SIFIR** — Bölmede 0 var mı? **Sayılar aynı işaretli mi?** → **3. KARŞIT ÖRNEK** — "Daima" iddiası için **negatif / √2 / 0 dene!** → **4. ORTALAMA** — Araya sayı koymada **(a+b)/2 yöntemini uygula!**

Bölüm 5 — Hemen Dene! (4 Hızlı Pekiştirme Mikro-Sorusu)

1. $\frac{1}{4}$ ile $\frac{2}{3}$ sayılarının tam ortasındaki rasyonel sayıyı bulunuz. **2.** $4x-y\le 12$ ve $12\le 4x-y$ ise $4x-y$ kaçtır?

3. $\sqrt{27}$ ile $\sqrt{3}$'ün çarpımı hangi en dar sayı kümesindedir? **4.** $-1<x<0$ ise $x, x^2, \frac{1}{x}$ ifadelerini küçükten büyüğe sıralayınız.

Hemen Dene Cevapları: 1) $\frac{11}{24}$ 2) 12 3) $9\in\mathbb{N}$ 4) $\frac{1}{x}<x<x^2$