1.4. Gerçek Sayıların İşlem Özellikleri

9. SINIF MATEMATİK | MAARİF MODELİ UYUMLU | Hızlı Hatırlama • MAT.9.1.4

Daha fazla soru ve konu anlatımı için
www.sinifdijital.com

Rafine Özet Kartları • Geometrik Alan Modelleri • Kavram Yanılgısı Radarı • Hızlı Pekiştirme Soruları

Bölüm 1 — Önermeler, Niceleyiciler ve İşlem Aksiyomları

1. Önerme ve Değil Alma

- Doğru/yanlış **kesin hüküm** önermedir (soru, emir değil!).
- $\forall$ ("her") $\leftrightarrow$ $\exists$ ("bazı")
- $\wedge$ ("ve") $\leftrightarrow$ $\vee$ ("veya")
- $=\leftrightarrow\neq$, $<\leftrightarrow\geq$, $\leq\leftrightarrow>$

2. Birim, Ters, Dağılma ($\mathbb{R}$)

- **Toplama:** Birim 0, Ters $-a$
- **Çarpma:** Birim 1, Ters $\frac{1}{a}$ (0'ın tersi yok!)
- **Yutan:** Yalnız çarpma ($a \cdot 0 = 0$)
- **Çıkarma & Bölme:** Değişme, birleşme, birim ve yutan elemanları **yoktur**.

3. Sıfır Çarpan ve İşaret

- $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$
- $a \cdot b \neq 0 \iff a \neq 0 \wedge b \neq 0$
- $a \cdot b < 0 \implies a$ ve b **zıt** işaretli
- Çift: $2k$, Tek: $2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$

Niceleyicili Önermede Değil Alma

p : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ (\ x^2 \geq 0\ \wedge\ x+1 \neq 0\ )$ — Başlangıç önermesi

$p' \equiv \exists\ x \in \mathbb{R},\ \neg\ (\ x^2 \geq 0\ \wedge\ x+1 \neq 0\ )$ — 1. $\forall \to \exists$, içerik değillenir

$p' \equiv \exists\ x \in \mathbb{R},\ (\ \neg(x^2 \geq 0)\ \vee\ \neg(x+1 \neq 0)\ )$ — 2. De Morgan: $\wedge \to \vee$

$p' \equiv \exists\ x \in \mathbb{R},\ (\ x^2 < 0\ \vee\ x+1 = 0\ )$ — 3. $\geq \to <$ ve $\neq \to =$

Kontrol: $x = -1$ için $x+1 = 0$ olduğundan p' doğru, p yanlıştır.

Tanım kümesi hep $x \in \mathbb{R}$ kalır.

Dört İşlemin Özellikleri

	Toplama $(+)$	Çıkarma $(-)$	Çarpma $(\cdot)$	Bölme $(\div)$ bölen $\neq 0$ olmak üzere
Değişme $x * y = y * x$	✓ $a+b=b+a$	✗ $5-2 \neq 2-5$	✓ $a \cdot b = b \cdot a$	✗ $8 \div 2 \neq 2 \div 8$
Birleşme $(x * y) * z = x * (y * z)$	✓ $(a+b)+c=a+(b+c)$	✗ $(8-4)-2 \neq 8-(4-2)$	✓ $(ab)c=a(bc)$	✗ $(16 \div 4) \div 2 \neq 16 \div (4 \div 2)$
Birim (Etkisiz) Eleman $x * e = e * x = x$	✓ $e=0$: $a+0=0+a=a$	✗ $a-0=a$ ama $0-a \neq a$	✓ $e=1$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	✗ $a \div 1 = a$ ama $1 \div a \neq a$
Ters Eleman $x * x^{-1} = e$	✓ $a+(-a)=0$	✗ birim eleman yok	✓ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ $(a \neq 0)$	✗ birim eleman yok
Yutan Eleman $x * y = y * x = y$	✗ yutan eleman yok	✗ yutan eleman yok	✓ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	✗ $a \div 0$ tanımsız

✓ özellik her zaman sağlanır ✗ özellik sağlanmaz (karşı örnek ya da eleman yok)

Dağılma: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$

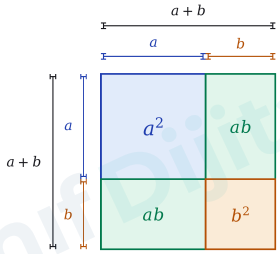
Sıfır çarpan: $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

Çıkarma ve bölme: $a - b = a + (-b)$, $a \div b = a \cdot b^{-1}$ $(b \neq 0)$

Bölüm 2 — Temel Cebirsel Özdeşlikler ve Geometrik Alan Modelleri

Özdeşlik Adı	Cebirsel Eşitlik ($\forall a, b \in \mathbb{R}$)	Geometrik / Pratik Anlamı
Toplamın Karesi	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	a^2 ve b^2 kareleri + 2 eş ab dikdörtgeni
Farkın Karesi	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	a^2'den iki ab şeridi kesilince köşe b^2 geri eklenir
İki Kare Farkı	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	Büyük kareden b^2 kesilince kalan L alanı
Rüzgârgülü Özdeşliği	$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$	4 eş dikdörtgenin çevrelediği merkez kare farkı

İki Terimin Toplamının Karesi



Alan = kenar × kenar

$$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^2$$

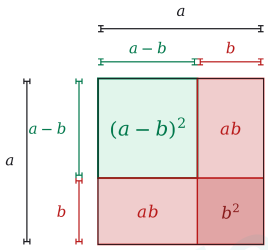
Dört parçanın alanları toplamı

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$a = 3,\ b = 2$ için: $5^2 = 9 + 6 + 6 + 4 = 25$

İki Terimin Farkının Karesi



Bütün kareden iki şeridi çıkar

$$a^2 - ab - ab = a^2 - 2ab$$

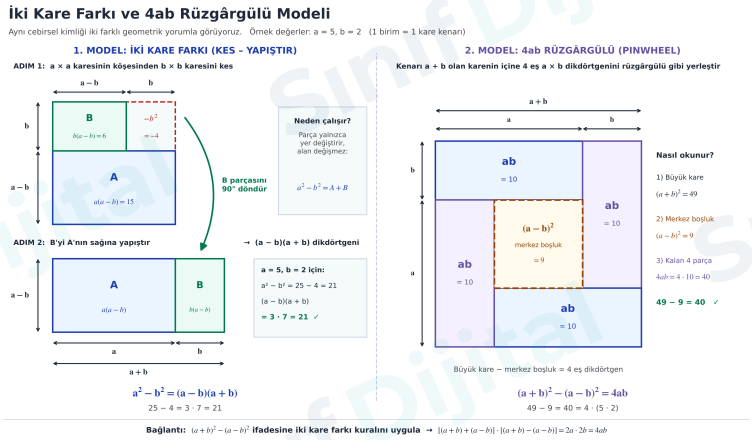
Köşe (b^2) iki kez çıkarıldı: bir kez geri ekle

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$a = 5,\ b = 2$ için: $3^2 = 25 - 10 - 10 + 4 = 9$

İki Kare Farkı ve 4ab Rüzgârgülü Modeli



Bölüm 3 — Kavram Yanılgısı Radarı (❌ Tuzak vs ✅ Doğru)

❌ **Yanlış:** $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ veya $(a-b)^2 = a^2 - b^2$	✅ **Doğru:** Ortadaki $\pm 2ab$ terimi asla unutulmaz: $a^2 \pm 2ab + b^2$!
❌ **Yanlış:** $(\forall x \in \mathbb{R},\ p(x))' \equiv \exists x \notin \mathbb{R},\ p'(x)$	✅ **Doğru:** Tanım kümesi ($\in \mathbb{R}$) değişmez! Yalnız $\forall \to \exists$ ve hüküm değillenir.
❌ **Yanlış:** $a \cdot b = 0$ ise $a = 0 \wedge b = 0$ olmalıdır.	✅ **Doğru:** $a = 0 \vee b = 0$ (yalnız birinin sıfır olması yeterlidir!).
❌ **Yanlış:** Bölme işleminde $a \div (b \div c) = (a \div b) \div c$	✅ **Doğru:** Çıkarma ve bölmenin birleşme ve değişme özellikleri yoktur!
❌ **Yanlış:** $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$ bir denklemdir.	✅ **Doğru:** Tüm $x \in \mathbb{R}$ için sağlandığından bir **özdeşliktir**!

Bölüm 4 — Stratejik Karar Akışı: "Soruda Nereden Başlanır?"

1. DEĞİL ALMADAN
∀↔∃, ∧↔∨ ve
<↔≥ dönüşümünü ayır!

→

2. ÇARPAN SADELEŞTİR
Büyük sayılarda
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ aç!

→

3. KARE TAMAMLA
a+b, ab, a^2+b^2 varsa
$(a \pm b)^2$ bağıntısını kur!

→

4. CEBİRSEL İSPAT
Tek/çift için 2k+1 / 2k
yazıp 2 parantezine al!

Bölüm 5 — Hemen Dene! (4 Hızlı Pekiştirme Mikro-Sorusu)

1. $\forall x \in \mathbb{N},\ x > 2$ önermesinin değilini yazınız. **2.** $a - b = 6$ ve $a \cdot b = 7$ ise $a^2 + b^2$ kaçtır?

3. $\dfrac{47^2 - 43^2}{47 + 43}$ işleminin sonucu kaçtır? **4.** $x = 2 - \sqrt{3}$'ün çarpma tersinin eşlenik eşiti nedir?

Hemen Dene Cevapları: 1) $\exists x \in \mathbb{N},\ x \leq 2$ 2) $36 + 14 = 50$ 3) $47 - 43 = 4$ 4) $2 + \sqrt{3}$