4.5. Doğrusal, Karesel, Karekök ve Rasyonel Ters Fonksiyonlar

10. SINIF MATEMATİK | MAARİF MODELİ UYUMLU | Hızlı Hatırlama • MAT.10.4.5

Daha fazla soru ve konu anlatımı için
www.sinifdijital.com

Bijeksiyon Şartı • $y = x$ Ayna Simetrisi • Mutlak Değer Köprüsü ($\sqrt{u^2} = |u|$) • Hayalet Kol Sınırı • Çapraz Katsayı • Kesişim Teoremi

Bölüm 1 — Varlık Şartı, Doğrusal/Rasyonel Ters ve Küme Takası

1. Temel İlke & Simetri

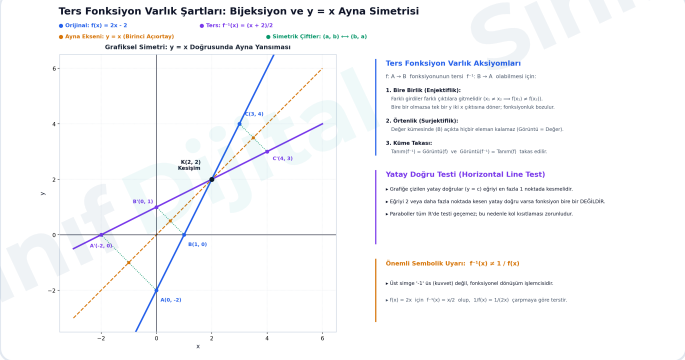
- **Varlık:** Bire bir + Örten (Yatay Test).
- $\text{Tanım}(f^{-1}) = \text{Değer}(f)$ takas!
- f ve f^{-1} $y = x$ doğrusuna simetriktir.

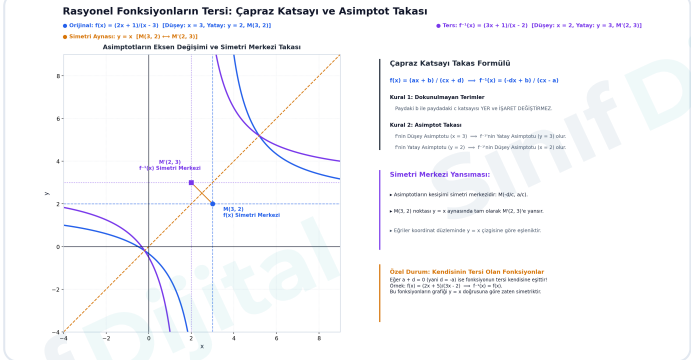
2. Doğrusal & Rasyonel Ters

- $ax + b \implies f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a} (a \neq 0)$.
- $\dfrac{\mathbf{a}x + b}{cx + \mathbf{d}} \implies \dfrac{-\mathbf{d}x + b}{cx - \mathbf{a}}$.
- Asimptot merkezi $M(r, k) \rightarrow M'(k, r)$!

3. Kesişim Teoremi ($y = x$)

- f tanım aralığında **kesin artan** ise:
- $\mathbf{f(x) = f^{-1}(x) \iff f(x) = x}$
- Bulunan kök tanım kümesine uyar mı bak!





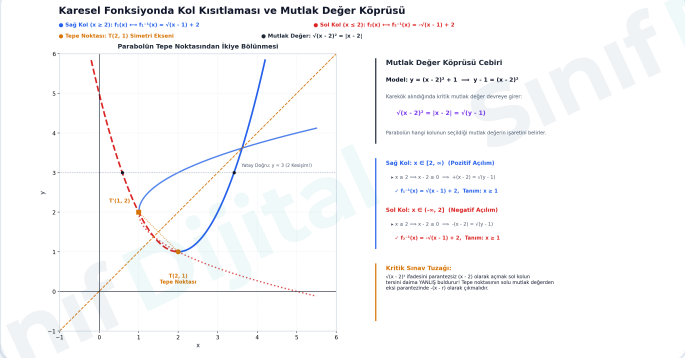
Bölüm 2 — Parabolde Kol Kısıtlaması ve Karekök Hayalet Kol Tuzağı

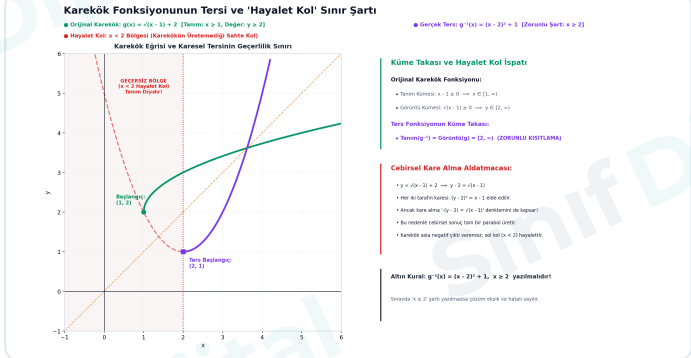
Karesel Fonksiyonlarda $|x-r|$ Mutlak Değer Köprüsü

$y = a(x-r)^2 + k$ çözülürken $\sqrt{(x-r)^2} = |x-r| = \sqrt{\frac{y-k}{a}}$ yazılır. **Sağ kolda ($x \geq r$)** $+\sqrt{\frac{x-k}{a}} + r$, **sol kolda ($x \leq r$)** ise $-\sqrt{\frac{x-k}{a}} + r$ seçilir!

Karekök Tersinde Hayalet Kol Sınırı ($x \geq k$)

$g : [r, \infty) \to [k, \infty)$, $a\sqrt{x-r} + k\,(a > 0)$ tersi $g^{-1}(x) = \left(\frac{x-k}{a}\right)^2 + r$ karesel ifadesini verir. **Ancak tanım kümesi** $\text{Değer}(g) = [k, \infty)$ olduğu için mutlaka $x \geq k$ sınırı yazılmalıdır!





Bölüm 3 — Kavram Yanılgısı Radarı (❌ Tuzak vs ✅ Doğru)

❌ **Yanlış:** $f^{-1}(x)$ ifadesi üssü -1 olan $\frac{1}{f(x)}$ kesri demektir.

✅ **Doğru:** f^{-1} çarpmaya göre ters değil, $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ **ters eşlemesidir**!

❌ **Yanlış:** $f(x) = \frac{5-2x}{x+3}$ tersinde 5 ile 3 yer ve işaret değiştirir.

✅ **Doğru:** Önce $\frac{-2x+5}{1x+3}$ diye x'li terimi öne yaz; $a = -2$ ile $d = 3$ değişir!

❌ **Yanlış:** $f : (-\infty, 2] \to [0, \infty),\ (x-2)^2$ tersi daima $2 + \sqrt{x}$ alınır.

✅ **Doğru:** Sol kolda $x \leq 2$ olduğu için $|x-2| = -(x-2) \implies \mathbf{2 - \sqrt{x}}$ olur!

❌ **Yanlış:** $\sqrt{x} + 3$ fonksiyonunun tersi tüm $\mathbb{R}$'de tanımlı $(x-3)^2$ parabolüdür.

✅ **Doğru:** Küme takası gereği tanım kümesi $\text{Değer}(f) = [3, \infty)$, yani $x \geq 3$ ile sınırlıdır!

Bölüm 4 — Stratejik Karar Akışı: "Ters Fonksiyonu Nasıl Bulurum?"

1. BİJEKSİYON & TAKAS
Tanım ve Değer kümelerini **hemen yer değiştir!**

➔

2. x'İ YALNIZ BIRAK
Rasyonelde $a \leftrightarrow -d$; **kareselde tamkare kur!**

➔

3. İŞARET & SINIR
Sağ/sol kola $\pm$ seç; **karekök tersine $x \geq k$ koy!**

➔

4. KESİŞİM ($y = x$)
Kesin artan fonksiyonda $f(x) = x$ **denklemini çöz!**

Bölüm 5 — Hemen Dene! (4 Hızlı Pekiştirme Mikro-Sorusu)

1. $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$ tersi $f^{-1}(x)$ nedir? **2.** $f : (-\infty, 1] \to [5, \infty),\ (x-1)^2 + 5$ tersi $f^{-1}(14)$ kaçtır?

3. $g : [2, \infty) \to [1, \infty),\ \sqrt{x-2} + 1$ tersinin tanım kümesi nedir? **4.** $f(x) = 4x - 9$ ile f^{-1} nerede kesişir?

Hemen Dene Cevapları: 1) $\frac{-4x-2}{x-3}$ 2) -2 3) $[1, \infty)$ 4) $(3, 3)$